Propriété (T), graphes extenseurs et génération de matrices inversibles

Guillaume Kineider sous la direction de François Dahmani

Table des matières

1 Introduction

1.1 Motivation

Comment produire aléatoirement, selon une loi uniforme, des matrices inversibles ?
Pour avoir une loi uniforme, il faut que l'ensemble des matrices inversibles considéré soit fini. Pour cela, le corps sera fini, mais potentiellement très grand. C'est d'ailleurs une limitation pertinente du point de vue informatique. Restreignons aussi l'ensemble des matrices au groupe spécial linéaire, pour simplifier l'étude sans vraiment perdre en généralité. Plus précisément, nous allons chercher à générer des matrices de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ où n est un entier vérifiant $n \geq 3$ et où p est un nombre premier pouvant être très grand. Puisque cet ensemble est fini, on pourrait simplement l'énumérer, et piocher uniformément parmi ces matrices (par exemple construire une bijection entre $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ et un ensemble d'entiers $\{1, 2, \ldots, N\}$ et utiliser une loi uniforme sur cet ensemble d'entiers). Mais cela serait très long, car il s'agit d'un ensemble extrêmement grand...
Au lieu de cela, utilisons sa structure de groupe (de type) fini : choisissons en une famille génératrice S (que l'on peut supposer symétrique $S = S^{-1}$) et appliquons la méthode précédente sur S pour pouvoir piocher uniformément des matrices génératrices. Cela reste raisonnable car cette partie S peut être choisie très petite. Par exemple, on peut considérer $S = T_n$, l'ensembles des matrices élémentaires $E_{i,j}(\pm 1)$ où les entiers vérifient $1 \leq i, j \leq n$ et $i \neq j$, c'est-à dire des matrices égales à l'identité sauf pour un coefficient en dehors de la diagonale qui vaut 1 ou -1. Il s'agit d'un ensemble de $2(n^2 - n)$ matrices, en particulier sa taille ne dépend pas de p !
On peut alors penser à la méthode suivante : fixer un entier N très grand, puis pour chaque matrice à générer, tirer uniformément N matrices de l'ensemble de générateurs et les multiplier.
Cette méthode semble raisonnable mais il reste à voir si elle donne une loi qui tend vers la loi uniforme lorsque N tend vers l'infini, et le cas échéant, ce que l'on peut dire sur la vitesse de convergence.

1.2 Objectif

Ce rapport a pour but d'analyser la convergence de cette méthode, et les clés qui permettent son fonctionnement dans ce cadre. En effet, les résultats que l'on obtiendra ne se généraliseront pas à un cas beaucoup plus général d'un groupe de type fini quelconque. A travers cet objectif, nous allons faire le lien entre des propriétés algébriques de groupe (en particulier de la propriété (T) de Kazhdan), des propriétés purement géométriques de graphes (notamment la propriété de graphe extenseur) et la convergence de marches aléatoires simples (paresseuses).
Le point de vue adopté sur l'algorithme précédent est celui d'une marche aléatoire sur un graphe de Cayley. On rappelle que le graphe de Cayley d'un groupe G muni d'une partie génératrice S est un graphe dont les sommets sont les éléments de G et dans lequel chaque sommet $g \in G$ est relié à tous les éléments de gS. Le principe de notre étude consistera à montrer dans un premier temps que $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ possède la propriété (T), qui donne une condition nécessaire à l'existence de vecteurs dits presqu'invariants dans une représentation unitaire. On remarquera alors que les graphes de Cayley des $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ donnent des représentations unitaires de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ qui ne peuvent admettre des vecteurs non-constants presqu'invariants. Cela se traduira par une propriété géométrique d'extension du graphe, indépendante de p, que l'on reliera ensuite aux propriétés spectrales de l'opérateur régissant la marche aléatoire.
Le résultat qui résume cette étude est le théorème 5.2.6, et on pourra trouver juste au-dessus des remarques proposant des pistes pour poursuivre l'étude.

2 Propriété (T) de Kazhdan

La propriété (T) s'énonce en terme de représentations unitaires, nous allons donc commencer par rappeler ce dont il s'agit.

Définition 2.0.1. Soit G un groupe topologique. Une représentation unitaire de G est un couple $(\pi, \mathcal{H})$ où $(\mathcal{H}, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ est une espace de Hilbert complexe et π est une application de G dans les opérateurs unitaires de $\mathcal{H}$ qui est *fortement continue*, c'est-à-dire que pour tout $\xi \in \mathcal{H}$ fixé, l'application $g \in G \mapsto \pi(g)\xi$ est continue.
On rappelle que $f : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est un opérateur unitaire si f est une application linéaire, bornée, bijective et vérifie :

$$\forall \xi, \eta \in \mathcal{H}, \qquad \langle f(\xi)\,, f(\eta) \rangle = \langle \xi\,, \eta \rangle\,.$$

Dans toute la suite, les espaces de Hilbert seront complexes, et leurs produits hermitiens seront notées $\langle \cdot , \cdot \rangle$ (avec l'espace noté en indice si besoin) et supposés linéaires à gauche et anti-linéaires à droite.

Définition 2.0.2. Soient G un groupe topologique et $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire de G.

- Si Q est un sous-ensemble de G et $\varepsilon > 0$, un vecteur ξ de $\mathcal{H}$ est dit (Q, ε)-presqu'invariant si

$$\forall g \in Q, \qquad \|\pi(g)\xi - \xi\| < \varepsilon \|\xi\|.$$

- On dit que la représentation $(\pi, \mathcal{H})$ *admet des vecteurs presqu'invariants* si pour tout sous-ensemble **compact** $Q \subset G$ et pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathcal{H}$ admet un vecteur (Q, ε)-presqu'invariant.
- Pour une partie Q de G, un vecteur Q-invariant est un vecteur $\xi \in \mathcal{H}$ tel que $\pi(g)\xi = \xi$ pour tout $g \in Q$.
- Un vecteur invariant est un vecteur G-invariant.

Remarque 2.0.3. Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire d'un groupe topologique G.

1. On remarque que si G admet un vecteur **non-nul** invariant, alors il admet des vecteurs presqu'invariants.
2. Le groupe G possède des vecteurs invariants si et seulement si $\mathcal{H}$ admet une sous-représentation triviale non-nulle.
3. Si $Q' \subset Q \subset G$ et $\varepsilon' > \varepsilon > 0$, alors les vecteurs (Q, ε)-presqu'invariants sont aussi (Q', ε')-presqu'invariants ainsi que $(\overline{Q \cup Q^{-1}}, \varepsilon)$-presqu'invariants (car $\|\pi(g)\xi - \xi\| = \|\pi(g^{-1})\xi - \xi\|$ pour tout $\xi \in \mathcal{H}$ et tout $g \in G$).

Définition 2.0.4. Soit G un groupe topologique.

- Pour $Q \subset G$ et $\varepsilon > 0$ on dit que (Q, ε) est une paire de Kazhdan si, pour toute représentation unitaire, admettre un vecteur (Q, ε)-presqu'invariant implique d'admettre un vecteur **non-nul** invariant.
- Le groupe G a la propriété (T) de Kazhdan, ou est un groupe de Kazhdan, s'il existe une partie **compacte** Q de G et un réel $\varepsilon > 0$ tels que (Q, ε) soit une paire de Kazhdan pour G.

Autrement dit, G a la propriété (T) de Kazhdan s'il existe une partie compact Q de G et un réel $\varepsilon > 0$ vérifiant : pour toute représentation unitaire $(\pi, \mathcal{H})$ de G admettant un vecteur ξ (Q, ε)-presqu'invariant, soit tel que

$$\forall g \in Q, \qquad \|\pi(g)\xi - \xi\| < \varepsilon \|\xi\|,$$

alors $\mathcal{H}$ admet un vecteur invariant pour tout le groupe G.

Remarque 2.0.5. La propriété (T) peut s'énoncer en terme topologique dans la topologie de Fell. Un groupe de Kazhdan est alors tel que la sous-représentation triviale est isolée pour cette topologie dans n'importe laquelle de ses représentations unitaires. On pourra trouver plus d'informations sur ce point de vue dans **réf à ajouter : KahzdanTotal**. On peut aussi avoir l'intuition informelle suivante : une représentation unitaire d'un groupe ayant la propriété (T) qui n'admet pas de vecteurs invariants, n'admettra pas non plus de vecteurs presqu'invariant.

La proposition suivante peut être énoncée à ce stade. Elle sera utile en particulier dans la suite pour montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ ($n \geq 3$) a la propriété (T).

Proposition 2.0.6. *Pour tout groupe topologique G la paire $(G, \sqrt{2})$ est une paire de Kazhdan.*
Autrement dit, si G est un groupe topologique et si $\mathcal{H}$ est une représentation unitaire de G qui admet un vecteur $(G,\sqrt{2})$-presqu'invariant, alors $\mathcal{H}$ possède un vecteur non-nul G-invariant.

Démonstration. Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire de G admettant un vecteur unitaire ξ qui est $\sqrt{2}$-presqu'invariant pour tout le groupe G :

$$\|\pi(g)\xi - \xi\| < \sqrt{2}$$

pour tout g dans G. Soit $\mathcal{C}$ l'enveloppe convexe du sous-ensemble $\{\pi(g)\xi \ : \ g \in G\} \subset \mathcal{H}$. Il s'agit d'un convexe fermé dans un espace de Hilbert, le théorème de projection sur un convexe complet donne l'existence d'un unique vecteur $\eta_0 \in \mathcal{C}$ de norme minimale. De plus, $\mathcal{C}$ est invariant pour l'action de G donc η_0 aussi (l'action de G est unitaire). Il reste à voir que η_0 est non-nul. Mais pour tout $g \in G$:

$$2 - 2\Re \langle \pi(g)\xi \,, \xi\rangle = \|\pi(g)\xi - \xi\|^2 \leq \sqrt{2}$$

soit $\Re \langle \pi(g)\xi \,, \xi\rangle > 0$. Puisque tout élément η de $\mathcal{C}$ est une combinaison linéaire convexe des $\pi(g)\xi$, on obtient :

$$\Re \langle \eta \,, \xi\rangle > 0$$

pour tout $\eta \in \mathcal{C}$, et en particulier pour η_0, qui est donc non-nul. □

Dans la preuve précédente, il est facile de se représenter l'argument principal en dimension 3 : si ξ est le pôle nord, la condition de $\sqrt{2}$-presqu'invariance pour le groupe G signifie que les $\pi(g)\xi$ pour $g \in G$ se trouvent tous au-dessus strictement de l'équateur (théorème de Pythagore) et donc que $\mathcal{C}$ est compris dans l'hémisphère nord privé de l'équateur (et donc $0 \notin \mathcal{C}$).

3 $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ a la propriété (T) pour $n \geq 3$

3.1 Propriété (T) relative de $(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^2, \mathbf{Z}^2)$

Le but de cette partie est de montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ a la propriété (T) de Kazhdan pour $n \geq 3$. Il s'agit d'une preuve due à Shalom et reformulée par B. Bekka, P. de la Harpe et A. Valette dans **Références à ajouter**

Le principe de cette grande démonstration est le suivant : on montre tout d'abord que $(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^2, \mathbf{Z}^2)$ possède une partie génératrice Q pour laquelle les vecteurs presqu'invariants sont en fait peu modifiés par l'action du sous-groupe $\mathbf{Z}^2$. On injecte ensuite $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^2$ dans $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ de différentes façons, de sorte à inclure chaque matrice élémentaire dans une image de $\mathbf{Z}^2$. On choisira une partie compacte et génératrice T_n pour $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ qui contient l'image par ces injections de Q afin que les vecteurs presqu'invariants pour T_n le soient aussi pour Q. On obtiendra donc que ces vecteurs sont peu modifiés par l'action des matrices élémentaires de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$. Alors grâce au fait qu'il existe un nombre ν_n tel que tout élément de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ s'obtient par une multiplication d'au plus ν_n matrices élémentaires (lemme de génération bornée), nous montrerons que pour un ε suffisamment petit (que l'on pourra expliciter !), tout vecteur (T_n,ε)-presqu'invariant est en fait $(\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}),1)$-presqu'invariant et la proposition 2.0.6 permettra de conclure.

On pose

$$U^{\pm} = \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad L^{\pm} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad e^{\pm} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f^{\pm} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

ainsi que $T_2 = \{U^{\pm}, L^{\pm}\}$ l'ensemble des transvections élémentaires et $Q = T_2 \cup \{e^{\pm}, f^{\pm}\}$. Notons que Q est une partie génératrice et symétrique de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^2$.

Lemme 3.1.1. *Le couple $(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^2, \mathbf{Z}^2)$ a la propriété (T) relative.*
Plus précisémment $(Q, 1/10)$ est une paire de Kazhdan pour $(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^2, \mathbf{Z}^2)$.

Rappelons que cela signifie ceci : si $(\pi, \mathcal{H})$ est une représentation unitaire de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^2$ qui admet un vecteur ξ $1/10-$presqu'invariant pour Q,

$$\forall \gamma \in Q, \quad \|\pi(\gamma)\xi - \xi\| < \frac{1}{10}\|\xi\|,$$

alors cette représentation admet un vecteur non-nul invariant pour l'action de $\pi(\mathbf{Z}^2)$.

Démonstration. Soient $\varepsilon = 1/10$ et $(\pi,\mathcal{H})$ une représentation unitaire de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^2$ qui admet un vecteur ξ unitaire et (Q,ε)-presqu'invariant.

Remarquons que le dual unitaire $\widehat{\mathbf{Z}^2}$ de $\mathbf{Z}^2$ est l'ensemble $Hom(\mathbf{Z}^2, \mathbb{S}^1)$ isomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{T}^2$. Puisque $\mathbf{Z}^2$ est un groupe localement compact et abélien, le théorème SNAG affirme que la représentation $\pi_{|\mathbf{Z}^2}$ permet de définir une mesure spectrale $E : \mathcal{B}(\widehat{\mathbf{Z}^2}) \to \mathrm{Proj}(\mathcal{H})$ telle que :

$$\forall z \in \mathbf{Z}^2, \quad \pi(z) = \int_{\chi \in \widehat{\mathbf{Z}^2}} \chi(z) \mathrm{d}E \qquad (*)$$

Le vecteur ξ et la mesure spectrale E permettent de définir une mesure de probabilité μ_ξ sur les boréliens de $\widehat{\mathbf{Z}^2}$ par :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\widehat{\mathbf{Z}^2}), \quad \mu_\xi(B) = \langle E(B)\xi\,, \xi\rangle$$

Maintenant on identifie $\widehat{\mathbf{Z}^2}$ au carré $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$, en assignant à $\chi \in \widehat{\mathbf{Z}^2}$ l'élément $(x,y) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$ où $\chi((1,0)) = exp(2\pi i x)$ et $\chi((0,1)) = exp(2\pi i y)$.

On pose alors $X = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]^2$ et ν la mesure de probabilité sur $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$ définie par :

$$\nu(B) = \frac{\mu_\xi(B \cap X)}{\mu_\xi(X)}$$

qui concentre donc tout son poids dans $X = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]^2$.

Le but maintenant est de voir que cette probabilité obtenue à partir de la représentation $(\pi,\mathcal{H})$ et du vecteur presqu'invariant ξ implique l'existence d'un vecteur non-nul invariant pour $\pi(\mathbf{Z}^2)$.

En effet, supposons par l'absurde qu'un tel vecteur n'existe pas.

1ère étape : montrons qu'alors $E(\{0\}) = 0$.

Supposons que $E(\{0\}) \neq 0$. Alors $E(\{0\})$ est un projecteur orthogonal sur un sous-espace de $\mathcal{H}$ de dimension au moins 1 que l'on note V. Soit $\zeta \in V$, montrons que ζ est un invariant pour $\pi(\mathbf{Z}^2)$. Pour $z \in \mathbf{Z}^2$:

$$\langle \pi(z)\zeta\,, \zeta\rangle = \int_{\chi \in \mathbb{T}^2} \chi(z) \mathrm{d}E_{\zeta,\zeta}(\chi)$$

Or l'intégrale sur $\{0\} \in \mathcal{B}(\widehat{\mathbf{Z}^2})$ donne :

$$\int_{\{0\}} \chi(z) \mathrm{d}E_{\zeta,\zeta}(\chi) = 1 \times \langle E(\{0\})\zeta\,, \zeta\rangle = \|\zeta\|^2$$

et pour $B \in \mathcal{B}(\widehat{\mathbf{Z}^2}) \setminus \{0\}$: $E(B \cap \{0\})\zeta = E(\emptyset)\zeta = 0$ d'une part, $E(B \cap \{0\})\zeta = E(B)E(\{0\})\zeta = E(B)\zeta$ d'autre part, donc $E(B)\zeta = 0$ et $\mathrm{d}E_{\zeta,\zeta}(B) = 0$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\widehat{\mathbf{Z}^2}) \setminus \{0\}$.

On en déduit que $\langle \pi(z)\zeta\,, \zeta\rangle = \|\zeta\|^2$ donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\pi(z)\zeta = \zeta$. Ce résultat donne que $\mu_\zeta(\{0\}) = 0$ et donc $\nu(\{0\}) = 0$.

2ème étape : montrons que ν peut s'étendre en une probabilité sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ et que l'action de $T_2 = \{U^\pm, L^\pm\}$ sur ses boréliens coïncide avec l'action transposée inverse de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$.

Pour le moment ν est défini sur les boréliens de $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$. Mais puisqu'elle concentre tout son poids sur $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]^2 \setminus \{(0,0)\}$, on peut l'étendre en une mesure de probabilité sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en posant pour $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$, $\nu(B) = \nu(B \cap X)$.

L'action linéaire à gauche de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur $\mathbf{Z}^2$ donne une action naturelle de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur le dual $\widehat{\mathbf{Z}^2}$, il s'agit de la transposée inverse (on la note avec $\cdot$) :

$$\forall \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}), \quad \forall \chi \in \widehat{\mathbf{Z}^2}, \quad \forall z \in \mathbf{Z}^2, \qquad \gamma \cdot \chi(z) = \chi(\gamma^{-1} z)$$

Voyons comment se traduit cette action par l'identification de $\widehat{\mathbf{Z}^2}$ avec le carré $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$. Soient un caractère linéaire $\chi \in \widehat{\mathbf{Z}^2}$ et son unique couple $(x,y) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$ associé. Si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, et $(m,n) \in \mathbf{Z}^2$, alors

$$\gamma \cdot \chi(m,n) = \chi\left(\gamma^{-1} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}\right) = e^{2\pi i[(dm-bn)x + (-cm+an)y]} = e^{2\pi i[(dx-cy)m + (ay-bx)n]}$$

donc l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur le carré est l'action à gauche "transposée inverse" sur $\mathbf{R}^2$:

$$(A, x) \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \times \mathbf{R}^2 \mapsto {}^t A^{-1} x,$$

mais modulo $\mathbf{Z}^2$ (pour rester dans le carré). Nous noterons cette action par un $\cdot$ également. Il est important de remarquer ici que $\gamma \cdot (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]^2 \subset (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$ pour tout $\gamma \in T_2$. Donc la restriction de cette action aux éléments de T_2 et aux points de X coïncide avec l'action "linéaire transposée" à gauche de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur $\mathbf{R}^2$, que l'on notera $\star$. On entend par là qu'on reste dans le carré, donc il n'y a plus besoin de recollements. En particulier, puisque ν concentre tout son poids dans X, pour tout $\gamma \in T_2$ et pour tout borélien de $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$:

$$\nu(\gamma \cdot B) = \nu(\gamma \star B) = \nu({}^t\gamma^{-1}B).$$

3ème étape : montrons maintenant que l'action de $\gamma \in \mathrm{T}_2$ ne peut pas changer le poids d'un borélien de $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$ de plus de 1/4 pour ν, i.e.

$$\forall \gamma \in \mathrm{T}_2, \quad \forall B \in \mathcal{B}\left(\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2\right), \quad |\nu(\gamma \cdot B) - \nu(B)| < \frac{1}{4}$$

Ajoutons tout de suite qu'avec l'étape précédente on aura alors :

$$\forall \gamma \in \mathrm{T}_2, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}), \quad \left|\nu\left({}^t\gamma^{-1}B\right) - \nu(B)\right| < \frac{1}{4}$$

puis le fait remarquable que $\gamma \mapsto {}^t\gamma^{-1}$ soit une bijection de T_2 sur lui-même permettra de simplifier encore en

$$\forall \gamma \in \mathrm{T}_2, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}), \quad |\nu(\gamma B) - \nu(B)| < \frac{1}{4}$$

On rappelle que :

$$\nu(B) = \frac{\mu_\xi(B \cap X)}{\mu_\xi(X)} \quad \text{avec} \quad \mu_\xi(B) = \langle E(B)\xi\,, \xi\rangle = \mathrm{d}E_{\xi,\xi}(B)$$

pour tout borélien B de $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$. Fixons γ dans T_2 et B un borélien de $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$. On cherche donc à majorer

$$\left|\frac{\mu_\xi(\gamma \cdot B \cap X) - \mu_\xi(B \cap X)}{\mu_\xi(X)}\right|.$$

Commençons par démontrer la minoration du dénominateur $\mu_\xi(X) \geq 1 - \varepsilon^2$. En effet, ξ est un vecteur (Q,ε)-presqu'invariant donc puisque $e^\pm$, $f^\pm \in Q$, on a :

$$\|\pi(e^\pm)\xi - \xi\|^2 \leq \varepsilon^2 \quad \text{et} \quad \|\pi(f^\pm)\xi - \xi\|^2 \leq \varepsilon^2$$

Mais rappelons que la mesure E vérifie (voir annexe) :

$$\left\|\left(\int_{\chi \in \widehat{\mathbf{Z}^2}} f(\chi)\mathrm{d}E(\chi)\right)\zeta\right\|^2 = \int_{\chi \in \widehat{\mathbf{Z}^2}} |f(\chi)|^2 \mathrm{d}E_{\zeta,\zeta}(\chi)$$

pour toute fonction borélienne bornée sur $\widehat{\mathbf{Z}^2}$ et tout $\zeta \in \mathcal{H}$. Donc avec $(*)$:

$$\begin{aligned}
\|\pi(e^\pm)\xi - \xi\|^2 &= \left\|\left[\pi(e^\pm) - \pi(0_{\mathbf{Z}^2})\right]\xi\right\|^2 \\
&= \left\|\left(\int_{\chi \in \widehat{\mathbf{Z}^2}} \left[\chi(e^\pm) - \chi(0_{\mathbf{Z}^2})\right] \mathrm{d}E(\chi)\right)\xi\right\|^2 \\
&= \int_{\chi \in \widehat{\mathbf{Z}^2}} \left|\left[\chi(e^\pm) - \chi(0_{\mathbf{Z}^2})\right]\right|^2 \mathrm{d}E_{\xi,\xi}(\chi) \\
&= \int_{(x,y) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2} \left|e^{\pm 2\pi i x} - 1\right|^2 \mathrm{d}\mu_\xi(x,y)
\end{aligned}$$

et de même

$$\|\pi(f^\pm)\xi - \xi\|^2 = \int_{(x,y) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2} \left|e^{\pm 2\pi i y} - 1\right|^2 \mathrm{d}\mu_\xi(x,y).$$

Or

$$\left|e^{\pm 2\pi i t} - 1\right|^2 = \left|e^{\pm \pi i t}\right|^2 \left|e^{\pm \pi i t} - e^{\mp \pi i t}\right|^2 = 4\sin^2 \pi t \geq 2$$

pour $1/4 \leq |t| \leq 1/2$, donc

$$2\mu_\xi\left(\left\{(x,y) \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2 \;:\; |x| \geq \frac{1}{4}\right\}\right) \leq \int_{(x,y) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2,\, |x| \geq 1/4} 4\sin^2(\pi x)\mathrm{d}\mu_\xi(x,y) \leq \varepsilon^2$$

puis

$$\mu_\xi\left(\left\{(x,y)\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2\ :\ |x|\geq\frac{1}{4}\right\}\right)\leq\frac{\varepsilon^2}{2}$$

et de même

$$\mu_\xi\left(\left\{(x,y)\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2\ :\ |y|\geq\frac{1}{4}\right\}\right)\leq\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

La réunion des deux ensembles précédents formant le complémentaire de X, on a bien $\mu_\xi(X)\geq 1-\varepsilon^2$.
Pour le numérateur on écrit :

$$\mu_\xi(\gamma\cdot B\cap X)-\mu_\xi(B\cap X)=(\mu_\xi\gamma\cdot B\cap X)-\mu_\xi(\gamma\cdot B))+(\mu_\xi(\gamma\cdot B)-\mu_\xi(B))+(\mu_\xi(B)-\mu_\xi(B\cap X))$$

puis on remarque que le premier terme est négatif, et que le troisième peut être majorer par le point précédent :

$$\mu_\xi(B)-\mu_\xi(B\cap X)=\mu_\xi(B\cap X^c)\leq\mu_\xi(X^c)\leq\varepsilon^2.$$

Il reste à majorer le troisième terme, et pour ce faire nous allons utiliser la propriété suivante, démontré après cette preuve :

$$\forall\gamma\in\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}),\quad\forall B\in\mathcal{B}(\widehat{\mathbf{Z}^2}),\quad E(\gamma\cdot B)=\pi(\gamma^{-1})E(B)\pi(\gamma)$$

ainsi que le caractère unitaire de $\pi(\gamma)$ et de ξ. On écrit

$$\begin{aligned}
|\mu_\xi(\gamma\cdot B)-\mu_\xi(B)|&=|\left\langle\pi(\gamma^{-1})E(B)\pi(\gamma)\xi\,,\xi\right\rangle-\langle E(B)\xi\,,\xi\rangle\,\|\\
&\leq|\left\langle\pi(\gamma^{-1})E(B)\pi(\gamma)\xi\,,\xi\right\rangle-\left\langle\pi(\gamma^{-1})E(B)\xi\,,\xi\right\rangle|+|\left\langle\pi(\gamma^{-1})E(B)\xi\,,\xi\right\rangle-\langle E(B)\xi\,,\xi\rangle\,|\\
&=|\left\langle\pi(\gamma^{-1})E(B)(\pi(\gamma)\xi-\xi\,,\xi\right\rangle|+|\left\langle E(B)\xi\,,(\pi(\gamma)\xi-\xi)\right\rangle|\\
&\leq\|\pi(\gamma^{-1})E(B)\|\|\pi(\gamma)\xi-\xi\|+\|E(B)\|\|\pi(\gamma)\xi-\xi\|\\
&\leq\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon
\end{aligned}$$

On a donc $\mu_\xi(\gamma\cdot B\cap X)-\mu_\xi(B\cap X)\leq 2\varepsilon+\varepsilon^2$, et en remplaçant B par $\gamma\cdot B$ et γ par γ^{-1} (T_2 est symmétrique) :

$$\mu_\xi((\gamma^{-1}\cdot(\gamma\cdot B))\cap X)-\mu_\xi\gamma\cdot B\cap X)=\mu_\xi(B\cap X)-\mu_\xi(\gamma\cdot B\cap X)\leq 2\varepsilon+\varepsilon^2$$

ce qui donne $|\mu_\xi(\gamma\cdot B\cap X)-\mu_\xi(B\cap X)|\leq 2\varepsilon+\varepsilon^2$. Et finalement, en se souvenant que $\varepsilon=1/10$, on obtient :

$$|\nu(\gamma\cdot B)-\nu(B)|\leq\frac{2\varepsilon+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}=\frac{21}{99}<\frac{1}{4}$$

4ème étape : nous pouvons maintenant exhiber une contradiction.
Pour cela, découpons le plan $\mathbf{R}^2\setminus\{0\}$ en 8 parties par les axes et les droites $x=y$ et $x=-y$, et réunissons ces domaines par paires pour former A, B, C et D avec $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\setminus\{0\}\ :\ 0\leq y<x \text{ ou } x<y\leq 0\}$ et B (respectivement C, D) l'image de A par une rotation d'angle $\pi/4$ (respectivement $\pi/2$, $3\pi/4$). On a les égalités suivantes (simples calculs) :

$$\begin{array}{ll}
L^-\cdot(A\cup B)=U^+(A\cup B)=A & U^-\cdot(A\cup B)=L^+(A\cup B)=B\\
L^+\cdot(C\cup D)=U^-(C\cup D)=D & U^+\cdot(C\cup D)=L^-(C\cup D)=C
\end{array}$$

Mais on a alors :

$$\nu(A)=\nu(A\cup B)-\nu(B)=\nu(A\cup B)-\nu(U^-\cdot(A\cup B))<\frac{1}{4}$$

par l'étape précédente, et de même pour B, C et D. Ainsi

$$1=\nu(\mathbf{R}^2\setminus\{0\})=\nu(A)+\nu(B)+\nu(C)+\nu(D)<1$$

et on obtient la contradiction cherchée. □

Remarque 3.1.2. La quatrième étape consistait en fait à prouver le résultat général suivant :

Lemme 3.1.3. *Soit ν une moyenne, i.e. une mesure finie et simplement additive, sur les boréliens de $\mathbf{R}^2\setminus\{0\}$. Il existe un borélien M de $\mathbf{R}^2\setminus\{0\}$ et un élément $\gamma\in T_2$ tels que $|\nu(\gamma M)-\nu(M)|\geq 1/4$ pour l'action naturelle de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur $\mathbf{R}^2$.*

On remarque dans la preuve que la bijection $\gamma\mapsto {}^t\gamma^{-1}$ de T_2 sur lui-même fait que le résultat tient pour l'action naturelle et l'action "transposée inverse". De plus, on sait que l'un de ces boréliens est soit $A\cup B$, soit $C\cup D$ (notations de l'étape 4 ci-dessus).

Dans la preuve du théorème précédent, on a utilisé un résultat qui reste à démontrer :

Proposition 3.1.4. *Soit $(\pi,\mathcal{H})$ une représentation unitaire du groupe $G = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^2$ et E la mesure spectrale associée à la restriction $\sigma = \pi_{|\mathbf{Z}^2}$ de π au sous-groupe $\mathbf{Z}^2 \subset \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^2$ (théorème SNAG en annexe). Alors on a :*

$$\forall \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\widehat{\mathbf{Z}^2}), \qquad E(\gamma \cdot B) = \pi(\gamma^{-1})E(B)\pi(\gamma)$$

où $\cdot$ dénote l'action transposée inverse de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur le dual de $\mathbf{Z}^2$.

Sa démonstration s'appuiera beaucoup sur ce qui est exposé en annexe, notamment le lemme 6.1.2.

Démonstration. On fixe $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. On note $\gamma(z)$ l'action naturelle de γ sur $\mathbf{R}^2$ et simplement γz la multiplication dans le produit semi-direct $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^2$. L'application $\sigma^\gamma : z \mapsto \sigma(\gamma(z))$ est une représentation unitaire de $\mathbf{Z}^2$ sur $\mathcal{H}$, on note sa mesure spectrale associée E^γ.
1ère étape : Montrons l'égalité $\sigma^\gamma(z) = \pi(\gamma)\sigma(z)\pi(\gamma^{-1})$ pour tout $z \in \mathbf{Z}^2$.
Soit $z \in \mathbf{Z}^2$. Remarquons simplement que $\gamma(z) = \gamma z \gamma^{-1}$, on a donc

$$\pi(\gamma(z)) = \sigma^\gamma(z) = \pi(\gamma)\pi(z)\pi(\gamma^{-1}) = \pi(\gamma)\sigma(z)\pi(\gamma^{-1})$$

2ème étape : Montrons que $E^\gamma(B) = E(\gamma \cdot B)$ pour tout borélien B de $\widehat{\mathbf{Z}^2}$.
Pour cela, montrons l'égalité des mesures associées au vecteur ξ de $\mathcal{H}$. On a :

$$\langle \sigma^\gamma(z)\xi\,, \xi\rangle = \langle \sigma(\gamma(z))\xi\,, \xi\rangle = \int_{\chi\in\widehat{\mathbf{Z}^2}} \chi(\gamma(z))\mathrm{d}\mu_\xi(\chi) = \int_{\chi\in\widehat{\mathbf{Z}^2}} \gamma^{-1}\cdot\chi(z)\mathrm{d}\mu_\xi(\chi) = \int_{\chi\in\widehat{\mathbf{Z}^2}} \chi(z)\mathrm{d}\gamma_*^{-1}(\mu_\xi)(\chi)$$

donc la mesure associée à (E^γ, ξ) est $\gamma_*^{-1}(\mu_\xi)$. Or on remarque que :

$$\langle E(\gamma\cdot B)\xi\,, \xi\rangle = \mu_\xi(\gamma\cdot B) = \gamma_*^{-1}(\mu_\xi)(B)$$

donc c'est également la mesure associée à la mesure spectrale $B \mapsto E(\gamma \cdot B)$ et à ξ et le lemme 6.1.2 conclut cette étape.
3ème étape : Montrons que la mesure spectrale associée à $\pi(\gamma)\sigma(\cdot)\pi(\gamma^{-1})$ est $\pi(\gamma^{-1})E(B)\pi(\gamma)$.
En effet, pour $z \in \mathbf{Z}^2$:

$$\left\langle \pi(\gamma^{-1})\sigma(z)\pi(\gamma)\xi\,, \xi\right\rangle = \langle \sigma(z)\pi(\gamma)\xi\,, \pi(\gamma)\xi\rangle = \int_{\chi\in\widehat{\mathbf{Z}^2}} \chi(z)\mathrm{d}\mu_{\pi(\gamma)\xi}$$

et

$$\left\langle \pi(\gamma^{-1})E(B)\pi(\gamma)\xi\,, \xi\right\rangle = \langle E(B)\pi(\gamma)\xi\,, \pi(\gamma)\xi\rangle = \mu_{\pi(\gamma)\xi}(B)$$

donc les mesures associées à ξ de ces deux mesures spectrales coïncident et on utilise à nouveau le lemme.
Conclusion : La première étape donne deux expressions pour la même représentation, les étapes 2 et 3 donnent les mesures spectrales associées à ces deux expressions, qui doivent donc être égales, on obtient bien :

$$\forall \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\widehat{\mathbf{Z}^2}), \qquad E(\gamma \cdot B) = \pi(\gamma^{-1})E(B)\pi(\gamma).$$

□

Si $(\pi,\mathcal{H})$ une représentation unitaire de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^2$ qui admet un vecteur ξ (Q,ε)-presqu'invariant, le théorème précédent donne l'existence d'un vecteur invariant pour l'action du sous-groupe $\mathbf{Z}^2$. Mais la preuve n'est pas constructive et ne donne pas d'informations supplémentaires sur ξ. Le corollaire suivant permet de montrer que ξ est en fait presqu'invariant (à un facteur 20 près) pour tout le sous-groupe $\mathbf{Z}^2$.

Corollaire 3.1.5. *Soit $\varepsilon > 0$, et soit $(\pi,\mathcal{H})$ une représentation unitaire de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^2$. Un vecteur unitaire $(Q, \varepsilon/20)$-invariant ξ est $(\mathbf{Z}^2, \varepsilon)$-invariant, i.e. $\|\pi(z)\xi - \xi\| < \varepsilon$ pour tout $z \in \mathbf{Z}^2$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $(\pi,\mathcal{H})$ une représentation unitaire de $G = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^2$ admettant un vecteur unitaire $(Q, \varepsilon/20)$-invariant ξ. L'idée est la suivante : on note $\mathcal{H}_0$* le sous-espace des vecteurs invariants pas l'action de $\pi(\mathbf{Z}^2)$ et $\mathcal{H}_1$ son orthogonal (également stable pour $\pi(\mathbf{Z}^2)$), alors ξ se décompose en $\xi = \xi_0 + \xi_1$ et :

$$\|\pi(z)\xi - \xi\|^2 = \|\pi(z)\xi_0 - \xi_0\|^2 + \|\pi(z)\xi_1 - \xi_1\|^2 = \|\pi(z)\xi_1 - \xi_1\|^2 \leq 2\|\xi_1\|^2 \quad (**)$$

pour tout $z \in \mathbf{Z}^2$. Il suffit donc de montrer que la partie ξ_1 de ξ est petite.
Pour cela, on remarque que $\mathbf{Z}^2$ étant normal dans G, $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$ sont en fait stables par tout G. Donc :

$$\|\pi(\gamma)\xi - \xi\|^2 = \|\pi(\gamma)\xi_0 - \xi_0\|^2 + \|\pi(\gamma)\xi_1 - \xi_1\|^2$$

pour tout $\gamma \in G$. Et le point clé ici est que le sous-espace $\mathcal{H}_1$ ne contient pas de vecteur non-nul $\pi(\mathbf{Z}^2)-$invariant (par définition) et donc le théorème précédent donne :

$$\|\pi(\gamma_0)\xi_1 - \xi_1\|^2 \geq \left(\frac{\|\xi_1\|}{10}\right)^2$$

pour un certain $\gamma_0 \in Q$. Or ξ étant $(Q, \varepsilon/20)$-invariant :

$$\|\pi(\gamma)\xi_1 - \xi_1\|^2 \leq \|\pi(\gamma)\xi - \xi\|^2 < \left(\frac{\varepsilon}{20}\right)^2$$

pour tout $\gamma \in Q$. Cette inégalité avec $\gamma = \gamma_0$ et la précédente donnent :

$$\left(\frac{\|\xi_1\|}{10}\right)^2 < \left(\frac{\varepsilon}{20}\right)^2$$

soit $\|\xi_1\| < \varepsilon/2$ soit avec $(**)$: $\|\pi(z)\xi - \xi\|^2 < \varepsilon$ pour tout $z \in \mathbf{Z}^2$. □

3.2 Propriété (T) de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ pour $n \geq 3$

Dans cette section on fixe un entier $n \geq 3$.

Avant de donner le résultat principal de cette section, voici deux lemmes importants pour sa démonstration.

Lemme 3.2.1. *Soient i,j des entiers avec $1 \leq i, j \leq n$ et $i \neq j$. Il existe un morphisme injectif $\alpha : \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^2 \to \mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ tel que $E_{i,j}(m) \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ soit contenu dans $\alpha(\mathbf{Z}^2)$ pour tout $m \in \mathbf{Z}$ et :*

$$\alpha(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})) = \begin{pmatrix} I_k & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}) & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-k-2} \end{pmatrix}$$

pour un certain $k \in \{0, \dots, n-2\}$.

Démonstration. Procédons par récurrence. Pour le cas $n = 3$, il suffit de vérifier que les injections décrites par les images de $(A, (x, y)) \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^2$ suivantes :

$$\left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A}} & x \\ & & y \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} \multicolumn{2}{c}{A} & 0 \\ & & 0 \\ x & y & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 1 & x & y \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{A} \\ 0 & & \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ x & \multicolumn{2}{c}{A} \\ y & & \end{array} \right),$$

donne le résultat.

Soit maintenant $n > 3$. On suppose que le lemme est vérifiée pour $n-1$. Si $(i, j) \neq (1, n)$ et $(i, j) \neq (n, 1)$, on considère l'un des sous-groupes

$$\begin{pmatrix} \mathrm{SL}_{n-1}(\mathbf{Z}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{SL}_{n-1}(\mathbf{Z}) \end{pmatrix}$$

et l'hypothèse de récurrence donne le résultat. Si $(i, j) = (1, n)$, on peut choisir l'injection décrite par

$$\begin{pmatrix} \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) & 0 & \mathbf{Z}^2 \\ 0 & I_{n-4} & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{pmatrix}$$

et si $(i, j) = (n, 1)$ on considère l'injection dont l'image est la transposée :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) & 0 & 0 \\ 0 & I_{n-4} & 0 \\ \mathbf{Z}^2 & 0 & I_2 \end{pmatrix}$$

□

Lemme 3.2.2 (Génération bornée)**.** *Toute matrice de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ peut être obtenue comme un produit d'au plus $\nu_n = \frac{1}{2}(3n^2 - n) + 36$ matrices élémentaires.*

Ce résultat sera admis ici. Sa preuve est donnée dans **référence à ajouter**. Elle est "semi-constructive" : on peut donner la série d'opérations à faire pour obtenir n'importe quelle matrice, mais certains entiers nécessaires pour ces opérations ne sont pas déterminés explicitement, leur existence étant donné par exemple par le théorème de Dirichlet. On remarque aussi que ce lemme signifie que le graphe de Cayley du groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ avec pour partie génératrice les matrices élémentaires, bien qu'infini, est de largeur bornée.

Voici le théorème principal :

Théorème 3.2.3. *Le groupe* $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ *a la propriété (T) pour* $n \geq 3$.
Plus précisément, on note Q_n *l'ensemble des* $n^2 - n$ *matrices élémentaires* $E_{i,j}(1)$ *pour* $1 \leq i, j \leq n$ *et* $i \neq j$. *Alors* $\left(Q_n, \frac{1}{20\nu_n}\right)$ *est une paire de Kazhdan.*

Démonstration. Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ admettant un vecteur ξ $\left(Q_n, \frac{1}{20\nu_n}\right)$-presqu'invariant. Le but est de montrer que ξ est en fait 1-presqu'invariant pour tout le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$, le lemme 2.0.6 donnera alors le résultat. Commençons par rappeler que si on note $T_n = Q_n \cup Q_n^{-1}$, montrer que $\left(Q_n, \frac{1}{20\nu_n}\right)$ est une paire de Kazhdan revient à montrer que $\left(T_n, \frac{1}{20\nu_n}\right)$ en est une. En effet,

$$\|\pi(\gamma)\zeta - \zeta\| = \|\pi(\gamma^{-1})\zeta - \zeta\|$$

pour tout $\gamma \in Q_n$ et tout vecteur $\zeta \in \mathcal{H}$, donc les deux conditions de presqu'invariance sont en fait les mêmes.
Soit γ une matrice élémentaire quelconque de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$. Le premier lemme de cette section nous donne une injection $\alpha : \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^2 \to \mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ telle que γ soit contenu dans le sous-groupe $\alpha(\mathbf{Z}^2)$ et qui envoie la partie génératrice Q de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^2$ définie au tout début de cette partie dans l'ensemble T_n. Ainsi, $(\pi \circ \alpha, \mathcal{H})$ est une représentation unitaire de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^2$ et ξ est un vecteur $\left(Q, \frac{1}{20\nu_n}\right)$-presqu'invariant de cette représentation. En particulier, nous avons vu avec le corollaire 3.1.5 que ce vecteur est en fait $\left(\mathbf{Z}^2, \frac{1}{\nu_n}\right)$-presqu'invariant, donc puisque $\gamma \in \alpha(\mathbf{Z}^2)$:

$$\|\pi(\gamma)\xi - \xi\| < \frac{1}{\nu_n}.$$

On procède de même pour toutes les matrices élémentaires, avec l'injection α qui convient, on a donc :

$$\|\pi(\gamma)\xi - \xi\| < \frac{1}{\nu_n}$$

pour toute matrice élémentaire γ. Maintenant soit A une matrice quelconque de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$. Montrons que $\|\pi(A)\xi - \xi\| < 1$. Le lemme de génération bornée donne l'existence d'un entier $N \leq \nu_n$ et de N matrices élémentaires $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ tels que $\gamma = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_N$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\|\pi(\gamma)\xi - \xi\| &= \|\pi(\gamma_1\cdots\gamma_N)\xi - \pi(0_{\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})})\xi\| \\
&= \|\sum_{i=0}^{N-1} \pi(\gamma_1\cdots\gamma_{N-i})\xi - \pi(\gamma_1\cdots\gamma_{N-i-1})\xi\| \\
&\leq \sum_{i=0}^{N-1} \|\pi(\gamma_1\cdots\gamma_{N-i})\xi - \pi(\gamma_1\cdots\gamma_{N-i-1})\xi\| \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \|\pi(\gamma_1\cdots\gamma_{N-i-1})[\pi(\gamma_{N-i})\xi - \xi]\| \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \|(\pi(\gamma_{N-i})\xi - \xi)\| \\
&< \frac{N}{\nu_n} \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

4 Extension et propriété (T)

Voici quelques notations relatives aux graphes utilisées dans toute la suite :

— $\mathcal{X}(V, E)$ désigne le graphe avec pour sommets V et arêtes E muni d'une orientation arbitraire ;
— pour une arête e, on note e^- son origine et e^+ sa cible ;
— si x est un sommet, on note $d(x)$ son degré, i.e. le nombre d'arêtes avec pour origine ou pour cible x ;
— pour un sous-ensemble de sommet A, on note A^c son complémentaire, c'est-à-dire l'ensemble des sommets du graphe qui ne sont pas dans A.

4.1 Graphes extenseurs

La notion de graphe extenseur résulte d'objectifs pratiques. Imaginons que l'on veuille créer un réseau (de télécommunication par exemple) sous la forme d'un graphe : on considère des sommets que l'on souhaite relier par des arêtes. Il est normal de chercher à maximiser la connexion de n'importe quelle partie du graphe à son complémentaire pour favoriser une propagation rapide de l'information, mais avec un minimum d'arêtes dans le graphe (on veut limiter le nombre de connections, coûteuses, à établir). Le taux d'extension d'un graphe a pour but de mesurer cette capacité. On appelle alors famille de graphes extenseurs toute suite de graphes de degrés uniformément bornés, dont le nombre de sommets tend vers l'infini et dont les taux d'extensions sont uniformément minorés.

Définition 4.1.1 (Graphes extenseurs)**.** Soit $X = \mathcal{X}(V,E)$ un graphe fini. Pour une partie $A \subset V$, on note ∂A l'ensemble des sommets qui sont à une distance de 1 de A. Alors on définit le taux d'extension de X comme :

$$\tau(X) = \inf_{A \subset V} |\partial A| \frac{|V|}{|A||A^c|} = \inf_{A \subset V} \frac{|\partial A|}{|A|\left(1 - \frac{|A|}{|V|}\right)}$$

Si $c > 0$ est tel que $c \leq \tau(X)$, on dit que X est un c-extenseur.
Si $c > 0$, on appelle famille de c-extenseurs une suite de graphes $(X_i)_{i \in \mathbf{N}}$ vérifiant :

(i) $|X_i| \underset{i \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$;

(ii) il existe un entier k tel que $d(x) \leq k$ pour tout $i \in \mathbf{N}$ et pour tout sommet x de X_i ;

(iii) $c \leq \tau(X_i)$ pour tout $i \in \mathbf{N}$.

Le troisième point sera appelé propriété de c-extension.

Par analogie avec la géométrie Riemannienne on peut définir pour tout graphe fini sa constante de Cheeger qui mesure le nombre d'arêtes à retirer pour séparer une partie du graphe en fonction de sa taille.

Définition 4.1.2 (Constante de Cheeger)**.** Soit $X = \mathcal{X}(V,E)$ un graphe fini. Si A et B sont deux ensembles de sommets disjoints de X, l'ensemble des arêtes les reliant est noté par $E(A,B)$. On définit la constante de Cheeger du graphe X par :

$$h(X) = \inf_{A \subset V} \frac{|E(A,A^c)|}{\min(|A|,|A^c|)}$$

La constante de Cheeger a pour avantage d'être une notion assez intuitive et une mesure "équivalente" au taux d'extension, le sens de cette équivalence étant donné par la proposition suivante :

Proposition 4.1.3. *Soit $X = \mathcal{X}(V,E)$ un graphe fini et k un entier tel que $d(x) \leq k$ pour tout sommet $x \in V$.*

1. *Si X est un graphe c-extenseur, alors $\frac{c}{2} \leq h(X)$.*
2. *Le graphe X est un $\frac{h(X)}{k}$-extenseur.*

En particulier, pour une suite de graphes $(X_i)_{i \in \mathbf{N}}$ vérifiant les points (i) *et* (ii) *de la définition de famille d'extenseurs, il existe un $c > 0$ tel que $(X_i)_{i \in \mathbf{N}}$ ait la propriété de c-extension si et seulement s'il existe un $c' > 0$ tel qu'elle vérifie*

$$(\text{iii}') \qquad c' \leq h(X_i) \qquad \text{pour tout } i \in \mathbf{N}.$$

Démonstration. (i) Soit $A \subset V$. Chaque point de la frontière de A est relié par au moins une arête incluse dans $E(A,A^c)$ donc $|\partial A| \leq |E(A,A^c)|$. Par c-extension :

$$c \leq |V| \frac{|\partial A|}{|A||A^c|} \leq |V| \frac{|E(A,A^c)|}{|A||A^c|}$$

et, quitte à remplacer A par A^c, on peut supposer $|A| \leq \frac{|V|}{2}$, donc $|A^c| \geq \frac{|V|}{2}$ et

$$c \leq 2 \frac{|E(A,A^c)|}{|A|} \leq 2 \frac{|E(A,A^c)|}{\min(|A|,|A^c|)}.$$

Prenant le minimum sur les sous-ensembles de sommets A, on obtient $c \leq 2h(X)$.
(ii) Soit $A \subset V$. Chaque arête de $|E(A,A^c)|$ relie un sommet de A à un sommet de ∂A, or le nombre d'arêtes ayant une extrémité dans ∂A est au plus égal à $k|\partial A|$, ce qui donne l'inégalité $|E(A,A^c)| \leq k|\partial A|$. On peut de même supposer que $|A| \leq \frac{|V|}{2}$ et alors :

$$h(X) \leq \frac{|E(A,A^c)|}{|A|} \leq k \frac{|\partial A|}{|A|} \leq k \frac{|\partial A|}{|A|} \frac{|V|}{|A^c|}$$

et prenant à nouveau le minimum sur $A \subset V$, on obtient $h(X) \leq k\tau(X)$. □

4.2 Lien avec la propriété (T)

Voici le théorème principal de cette partie :

Théorème 4.2.1. *Soient G un groupe de type fini ayant la propriété (T), S une partie finie génératrice et symétrique ($S = S^{-1}$) de G et $(N_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite de sous-groupes normaux de G d'indice fini tendant vers l'infini. Alors la famille de graphes de Cayley $(\mathcal{G}(G/N_i, S))_{i\in\mathbf{N}}$ est une famille de graphes c-extenseurs pour un certain $c > 0$.*

Remarque 4.2.2. Je note encore S son image par l'application quotient quand ce n'est pas ambigu. Pour pouvoir parler de graphe de Cayley, il faut un groupe et une partie génératrice de ce groupe, c'est pourquoi les sous-groupes sont supposés normaux dans le théorème. Mais en réalité, la démonstration montre que l'on n'est pas obligé de faire cette hypothèse. Pour $i \in \mathbf{N}$, on considère alors le graphe dont les sommets sont les classes à droite modulo N_i et dans lequel une arête relie N_ig à N_ih si et seulement s'il existe $s \in S$ tel que $N_ig = N_ihs$. Il s'agit alors d'un graphe de Schreier associé à l'action du groupe G sur l'ensemble G/N_i, et on observe facilement qu'on retrouve bien un graphe de Cayley si on suppose N_i normal et qu'on remplace S par SN_i/N_i.

Démonstration. Le groupe G a la propriété (T) donc on peut fixer un $\varepsilon > 0$ tel que pour toute représentation unitaire $(\pi,\mathcal{H})$ n'admettant pas de vecteur non-nul invariant on ait :

$$\forall \xi \in \mathcal{H}, \quad \exists s \in S, \qquad \|\pi(s)\xi - \xi\| > \varepsilon\|\xi\|,$$

autrement dit, $\mathcal{H}$ n'admet pas de vecteurs S-presqu'invariant.
Soit $i \in \mathbf{N}$. On note V_i le groupe fini G/N_i et n son cardinal. Il s'agit de l'ensemble des sommets du graphe de Cayley. On considère l'espace $L^2(V_i)$ des fonctions définies sur les sommets du graphe et à valeurs dans $\mathbf{C}$, muni du produit scalaire $(f, g) \mapsto \sum_{x\in V_i} f(x)g(x)$. C'est évidemment un espace de Hilbert et l'application $\pi : G \to \mathcal{L}(L^2(V_i))$ définie par

$$(\pi(a).f)(x) = f(xa) \qquad a \in G,\ f \in L^2(V_i),\ x \in V_i$$

en fait une représentation unitaire de G. L'action de G sur $V_i(= G/N_i)$ étant transitive, l'ensemble des fonctions de $L^2(V_i)$ G-invariantes sont les fonctions constantes $\mathcal{H}_1$ (il s'agit donc de la plus grande sous-représentation triviale de $L^2(V_i)$). Son supplémentaire orthogonal $L^2_0(V_i) = \{f \in L^2(V_i) \mid \sum_{x\in V_i} f(x) = 0\}$ est donc une sous-représentation de G ne possédant pas de vecteur non-nul G-invariant et ainsi par le premier point :

$$\forall f \in L^2_0(V_i), \quad \exists s \in S, \qquad \|\pi(s)f - f\| > \varepsilon\|f\|$$

Soit $A \subset V_i$ de cardinal a, et soit B son complémentaire de cardinal $b = n - a$. On pose $f_0 = b\mathbb{1}_A - a\mathbb{1}_B$. C'est un élément de $L^2_0(V_i)$, on considère un $s_0 \in S$ tel que $\|\pi(s_0)f_0 - f_0\| > \varepsilon\|f_0\|$. Le résultat viendra du calcul des deux membres de cette inégalité. D'une part,

$$\varepsilon^2\|f_0\|^2 = \varepsilon^2(ab^2 + ba^2) = \varepsilon^2 abn.$$

D'autre part, si $x \in V_i$ il y a deux cas :

— si x et xs_0 sont tous deux dans A ou tous deux dans B, alors

$$|(\pi(s_0)f_0)(x) - f_0(x)|^2 = 0\,;$$

— sinon $x \in E_{s_0}(A, B) = \{x \in V_i \mid x \in A \text{ et } xs_0 \in B \text{ ou } x \in B \text{ et } xs_0 \in A\}$ et alors

$$|(\pi(s_0)f_0)(x) - f_0(x)|^2 = (a + b)^2 = n^2.$$

Donc $\|\pi(s_0)f_0 - f_0\|^2 = n^2|E_{s_0}(A, B)|$. Montrons maintenant que $\frac{1}{2}|E_{s_0}(A, B)| \leq |\partial(A)|$.
On peut écrire $E_{s_0}(A, B)$ comme union de deux parties :

$$E_{s_0}(A, B) = (As_0 \cap B) \cup (A \cap Bs_0) = (As_0 \setminus A) \cup (Bs_0 \setminus B)$$

où la deuxième partie $Bs_0 \setminus B$ est en bijection avec $B \setminus Bs_0^{-1} = B \cap As_0^{-1} = As_0^{-1} \setminus A$. Il suffit alors de remarquer que $\partial A = AS \setminus A$ donc que ces deux parties s'injectent dans ∂A. On a donc montré que :

$$|\partial A| \geq \frac{1}{2}|E_{s_0}(A, B)| = \frac{\|\pi(s_0)f_0 - f_0\|^2}{2n^2} \geq \frac{\varepsilon^2\|f_0\|^2}{2n^2} = \frac{\varepsilon^2 ab}{2n} = \frac{\varepsilon^2}{2}|A||A^c|$$

donc $\mathcal{G}(G/N_i, S)$ est un c-extenseur pour un certain réel $c \geq \frac{\varepsilon^2}{2}$, or on rappelle que ε a été fixé au début de la preuve indépendamment de l'entier i, d'où le résultat. $\square$

Remarque 4.2.3. On peut résumer l'idée de la preuve précédente : montrer que l'absence de fonction presqu'invariante entraine l'absence d'ensemble presqu'invariant, soit de partie du graphe faiblement connectée.
Un résumé peut-être un peu trop concis... Détaillons un peu. Qu'est-ce qu'une fonction de $L^2(V_i)$ S-presqu'invariantes ? L'action de S sur $L^2(V)$ est en quelque sorte une permutation des valeurs, donc une fonction presqu'invariante a peu de valeurs distinctes, et chaque valeur est partagée par beaucoup de sommets reliés entre eux. On peut alors avoir pour image mental une partition grossière en composantes du graphe sur lesquelles la fonction est constante. Réciproquement, si le graphe possède une partie pratiquement déconnectée du reste du graphe, la fonction qui vaut une certaine valeur sur cette partie et une autre sur le complémentaire sera S-presqu'invariante. L'hypothèse montre alors que ce n'est pas possible, ce qui veut dire que toute partie du graphe est "fortement" connectée au reste, et il s'agit précisément de la définition d'être un graphe extenseur.

La preuve montre aussi qu'on a pas utilisé toute la puissance de la propriété (T), puisqu'on a pas regardé toutes les représentations unitaires, seulement les $L^2(G/N_i)$. Ainsi Lubotzky a introduit le concept de propriété (τ) qui est un peu moins forte que la propriété (T) de Kazhdan.

Définition 4.2.4 (Propriété (τ))**.** Soit G un groupe de type fini et S une partie génératrice finie et symétrique. On dit que G à la propriété (τ) vis-à-vis de la suite de sous-groupes normaux d'indice fini $(N_i)_{i\in\mathbf{N}}$ si la famille de graphes de Cayley $\mathcal{G}(G/N_i, SN_i/N_i)$ est une famille d'extenseurs. Si G a la propriété (τ) vis-à-vis de toutes les suites de sous-groupes normaux d'indice fini, alors on dit que le groupe G a la propriété (τ).

Le théorème précédent se reformule alors simplement par "la propriété (T) implique la propriété (τ)".

Soit alors un entier $n \geq 3$. Puisque le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ a la propriété (T), il a la propriété (τ), ce qui assure que $(\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}), T_n)_{p\in\mathcal{P}}$ est une famille d'extenseurs, où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers et $T_n = \{E_{i,j}(\pm 1) \mid 1 \leq i,j \leq n,\ i \neq j\}$ est l'ensemble des matrices élémentaires de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ (voir la remarque qui suit le théorème).

5 Graphes extenseurs et convergence de marches aléatoires

Le but de cette partie est de comprendre pourquoi les marches aléatoires sur des graphes extenseurs ont de bonnes propriétés de convergence. Pour cela nous allons d'abord montrer une nouvelle caractérisation de la propriété d'extension pour un graphe en terme de propriété spectrale.

5.1 Laplacien d'un graphe et extension

Dans toute cette partie $X = \mathcal{X}(V,E)$ est un graphe fini de taille $|V| = n$ avec une orientation arbitraire fixée. Nous allons travailler sur deux espaces de fonctions : $L^2(V)$ et $L^2(E)$. Par analogie avec la géométrie différentielle, on peut voir une arête e comme un vecteur tangent en e^- avec pour direction e^+ et on définit l'application "*différentielle*" :

$$d : \left| \begin{array}{ccc} L^2(V) & \longrightarrow & L^2(E) \\ f & \longmapsto & df \end{array} \right.$$

où $df(e) = f(e^+) - f(e^-)$ pour $e \in E$. On remarque notamment que pour une application $f \in L^2(V)$ constante on a $df = 0$, et plus généralement, il est bon de garder à l'esprit que $\|df\|$ contrôle les variations de f. On définit alors le Laplacien Δ du graphe X par $\Delta = d^*d$, i.e. caractérisé par

$$\langle f\,,\Delta g\rangle_{L^2(V)} = \langle df\,,dg\rangle_{L^2(E)} \qquad (f,g \in L^2(V))$$

On voit déjà avec cette définition que Δ est un opérateur autoadjoint et positif, ses valeurs propres sont donc réelles positives. Il n'est en revanche pas défini positif car toute fonction constante f donne $\Delta f = d^*df = 0$. En fait, si X est connexe alors l'espace propre associé à la valeur propre 0 est réduit au sous-espace des fonctions constantes sur V, donc en particulier il est de dimension 1. Mais pour le voir, donnons une expression un peu plus explicite de Δ.
Soit $\delta(X)$ la matrice d'adjacence de X, c'est à dire que $\delta(X)_{x,y}$ est le nombre d'arêtes joignant x et y sans considération d'orientation (le plus souvent ce nombre est soit 0 soit 1), et soit $S(X)$ la matrice diagonale telle que pour tout sommet x le nombre $S(X)_{x,x} = d(x)$ est le degré de V. En particulier, si le degré de chaque sommet est identique et égal à k (comme dans un graphe de Cayley de partie génératrice de cardinal k), alors $S(X) = kI_n$.

Proposition 5.1.1. *Le Laplacien de X est $\Delta = S(X) - \delta(X)$, ce qui donne les expressions intéressantes suivantes :*

$$\Delta f(x) = \sum_{y\in V} \delta_{x,y}(f(x) - f(y)) = d(x)f(x) - \sum_{y\in V} \delta_{x,y} f(y)$$

pour tout $x \in V$. En particulier, si tous les sommets sont de degré k, alors $\Delta = kI_n - \delta(X)$.

Pour alléger les écritures, on notera désormais δ et S plutôt que $\delta(X)$ et $S(X)$.

Démonstration. Il suffit de montrer que $\langle f\,,(S-\delta)g\rangle = \langle df\,,dg\rangle$ et on peut même supposer les fonctions f et g réelles par linéarité. D'une part :

$$\begin{aligned}\langle f\,,(S-\delta)g\rangle &= \sum_{x\in V} f(x)\left[d(x)g(x) - \sum_{y\in V}\delta_{x,y}g(y)\right]\\ &= \sum_{x\in V} d(x)f(x)g(x) - \sum_{x,y\in V}\delta_{x,y}f(x)g(y).\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\langle df\,,dg\rangle &= \sum_{e\in E}(f(e^+)-f(e^-))(g(e^+)-g(e^-))\\ &= \sum_{e\in E}(f(e^+)g(e^+)+f(e^-)g(e^-)) - \sum_{e\in E}(f(e^+)g(e^-)+f(e^-)g(e^+))\\ &= \sum_{x\in V} d(x)f(x)g(x) - \sum_{x,y\in V}\delta_{x,y}f(x)g(y)\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

On remarque au passage que d dépend de l'orientation donnée au graphe mais pas Δ.
Soit $f \in L^2(V)$ telle que $\Delta f = 0$. On note x_0 un sommet en lequel f atteint son maximum. Alors $\Delta f(x_0) = \sum_{y\in V}\delta_{x_0,y}(f(x_0)-f(y)) = 0$, la somme portant sur des nombres réels positifs, on en déduit qu'ils sont tous nuls et donc que f est constante sur tous les voisins de x_0 et égale à $f(x_0)$. Il vient donc bien que, si X est connexe, alors f est constante sur V donc l'espace propre associé à 0 est la droite des fonctions constantes. Plus généralement, la multiplicité de 0 comme valeur propre du Laplacien est égale au nombre de composantes connexes (prendre des fonctions constantes sur une composante et nulles sur les autres). On supposera X connexe dans toute la suite. On note

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{|V|-1}$$

les valeurs propres de Δ. La première valeur propre non nulle, appelée aussi *trou spectral*, joue un rôle important comme nous allons le voir. Ce qui précède permet d'en donner une expression car l'espace $L_0^2(V) = \left\{f \in L^2(V) \mid \sum_{x\in V} f(x) = 0\right\}$ est l'orthogonal de la droite des fonctions constantes, et donc λ_1 est la plus petite valeur propre de Δ restreint à cet espace, ce qui donne :

$$\lambda_1 = \inf\left\{\frac{\|df\|^2}{\|f\|^2} \mid f \in L_0^2(V)\right\}$$

car Δ est autoadjoint et positif.

Le résultat important de cette section est le suivant :

Théorème 5.1.2. *Soit X un graphe fini, connexe et dont le degré de chaque sommet est uniformément majoré par un entier k. On note λ_1 la plus petite valeur propre non nulle du Laplacien Δ de X, et $h(X)$ la constante de Cheeger du graphe. Alors,*

$$\frac{1}{2}\lambda_1 \leq h(X) \leq \sqrt{2k\lambda_1}$$

L'inégalité de droite est due à Dodziuk et Alon et celle de gauche à Tanner et indépendamment à Alon et Milman. J'énonce tout de suite le corollaire suivant qui explique l'importance du théorème et qui résume toutes les caractérisations de la propriété d'extension que l'on a vu :

Corollaire 5.1.3. *Une suite de graphes $(X_i)_{i\in\mathbf{N}}$ vérifiant :*

(i) $|X_i| \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *;*

(ii) il existe un entier k tel que $d(x) \leq k$ pour tout $i \in \mathbf{N}$ et pour tout sommet x de X_i ;

est une famille d'extenseurs si et seulement si l'une des trois propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

1. *il existe $c > 0$ tel que $c < \tau(X_i)$ pour tout $i \in \mathbf{N}$, où $\tau(X)$ est le taux d'extension du graphe $X = \mathcal{X}(V,E)$ défini par :*

$$\inf_{A\subset V}\frac{|\partial A|}{|A||A^c|}|V|$$

avec ∂A la frontière de A, c'est-à-dire l'ensemble des sommets à une distance 1 de A ;

2. *il existe $c > 0$ tel que $c < h(X_i)$ pour tout $i \in \mathbf{N}$, où $h(X)$ est la constante de Cheeger du graphe $X = \mathcal{X}(V, E)$ défini par :*

$$h(X) = \inf_{A \subset V} \frac{|E(A, A^c)|}{\min(|A|, |A^c|)}$$

avec $E(A, A^c)$ l'ensemble des arêtes reliant un sommet de A à un sommet de son complémentaire A^c ;

3. *il existe $c > 0$ tel que $c < \lambda_1(X_i)$ pour tout $i \in \mathbf{N}$ où $\lambda_1(X_i)$ est la plus petite valeur propre non-nulle du Laplacien $\Delta(X_i)$ de X_i :*

$$\lambda_1(X_i) = \inf \left\{ \frac{\|df\|^2}{\|f\|^2} \mid f \in L^2_0(V_i) \right\}.$$

Le corollaire est immédiat, démontrons le théorème.

Démonstration. Soit $g \in L^2_0(V)$ une fonction propre pour Δ associée à λ_1 avec $\|g\| = 1$. On note V^+ l'ensemble $V^+ = \{x \in V \mid g(x) > 0\}$ et $f = g\mathbb{1}_{V^+}$ la partie positive de g. Puisqu'on peut remplacer g par $-g$, on peut de plus supposer $|V^+| \leq \frac{|V|}{2}$.

Commençons par montrer l'inégalité de droite. Le principe est d'encadrer la grandeur $A = \sum_{e \in E} |f(e^+)^2 - f(e^-)^2|$, au-dessus par une fonction de λ_1 et de $\langle f\,, f\rangle$, et en-dessous par une fonction de $h(X)$ et de $\langle f\,, f\rangle$.
Par inégalités de Cauchy-Schwarz puis de Young :

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{e \in E} |f(e^+) + f(e^-)||f(e^+) - f(e^-)| \\
&\leq \left(\sum_{e \in E} |f(e^+) + f(e^-)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{e \in E} |f(e^+) - f(e^-)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{2} \left(\sum_{e \in E} (f(e^+)^2 + f(e^-)^2) \right) \langle df\,, df\rangle^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{2k}\, \langle f\,, f\rangle^{\frac{1}{2}} \langle df\,, df\rangle^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

car dans $\sum_{e \in E} (f(e^+)^2 + f(e^-)^2)$ chaque sommet apparaît un nombre de fois égal à son degré. Ensuite on cherche à majorer $\langle df\,, df\rangle = \langle f\,, \Delta f\rangle$ en fonction de $\langle f\,, f\rangle$.

$$\begin{aligned}
\langle f\,, \Delta f\rangle &= \sum_{x \in V} f(x) \left(\sum_{y \in V} \delta_{x,y} (f(x) - f(y)) \right) \\
&= \sum_{x \in V^+} g(x) \left(\sum_{y \in V} \delta_{x,y} (g(x) - f(y)) \right) \\
&= \sum_{x \in V^+} g(x) \left(\sum_{y \in V^+} (g(x) - g(y)) \right) + \sum_{x \in V^+} g(x) \sum_{y \in V^-} g(x) \\
&\leq \sum_{x \in V^+} g(x) \left(\sum_{y \in V^+} (g(x) - g(y)) \right) + \sum_{x \in V^+} g(x) \left(\sum_{y \in V^-} (g(x) - g(y)) \right) \\
&= \sum_{x \in V^+} g(x) \Delta g(x) \\
&= \lambda_1 \sum_{y \in V^+} g(x)^2 \\
&= \lambda_1 \langle f\,, f\rangle
\end{aligned}$$

Donc on a montré $A \leq \sqrt{2k\lambda_1}\, \langle f\,, f\rangle$.
Minorons maintenant A. Puisque X est fini, f ne prend qu'un nombre fini de valeurs (positives) que l'on note $0 = \beta_0 < \beta_1 < \cdots < \beta_r$. On définit ensuite la suite décroissantes d'ensemble de sommets $L_i = \{x \in V \mid f(x) \geq \beta_i\}$. Alors,

$$A = \sum_{i=1}^{r} \sum_{f(x) = \beta_i} \sum_{f(y) < \beta_j} \delta_{x,y} (f(x)^2 - f(y)^2)$$

On remarque ensuite que si deux sommets x et y tels que $f(x) = \beta_i$ et $f(y) = \beta_{i-j}$ sont reliés, alors :

$$\delta_{x,y}(f(x)^2 - f(y)^2) = \beta_i^2 - \beta_{i-j}^2 = (\beta_i^2 - \beta_{i-1}^2) + (\beta_{i-1}^2 - \beta_{i-2}^2) + \cdots + (\beta_{i-j-1}^2 - \beta_{i-j}^2)$$

et ainsi, en notant $\bar{\partial} L_p = E(L_p, L_p^c)$ l'ensemble des arêtes reliant un sommet de L_i et un sommet de son complémentaire, alors l'arête reliant x à y apparaît dans $\bar{\partial} L_i$, $\bar{\partial} L_{i-1}$, ..., $\bar{\partial} L_{i-j}$ et

$$f(x)^2 - f(y)^2 = \sum_{p=0}^{j-1} \beta_{i-p}^2 - \beta_{i-p-1}^2$$

On a donc :

$$A = \sum_{i=1}^{r} \sum_{e \in \bar{\partial} L_i} \beta_i^2 - \beta_{i-1}^2 = \sum_{i=1}^{r} |\bar{\partial} L_i|(\beta_i^2 - \beta_{i-1}^2)$$

Or on peut minorer le nombre d'arêtes $|\bar{\partial} L_i|$ reliant L_i au reste du graphe à l'aide de la constante de Cheeger : $|\bar{\partial} L_i| \geq h(X)|L_i|$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$. Donc :

$$\begin{aligned} A &\geq h(X) \sum_{i=1}^{r} |L_i|(\beta_i^2 - \beta_{i-1}^2) \\ &= h(X) \left(\sum_{i=1}^{r} |L_i|\beta_i^2 - \sum_{i=0}^{r-1} |L_{i+1}|\beta_i^2 \right) \\ &= h(X) \left(|L_r|\beta_r^2 + \sum_{i=1}^{r-1} \beta_i^2(|L_i| - |L_{i+1}) \right) \end{aligned}$$

et un sommet x est dans $L_i \setminus L_{i+1}$ si et seulement si $f(x) = \beta_i$, donc on a en fait montré :

$$A \geq h(X) \langle f, f \rangle$$

ce qui donne $h(X) \langle f, f \rangle \leq A \leq \sqrt{2k\lambda_1} \langle f, f \rangle$ soit $h(X) \leq \sqrt{2k\lambda_1}$.

Pour l'autre inégalité, on considère un sous-ensemble $A \subset V$ de cardinal $a \leq \frac{|V|}{2}$ et on note B son complémentaire de taille $b = n - a$. On pose alors $f = b\mathbb{1}_A - a\mathbb{1}_B \in L_0^2(V)$. Alors :

$$\lambda_1 \leq \frac{\|df\|^2}{\|f\|^2} = \frac{n^2|E(A,B)|}{nab} \leq 2\frac{|E(A,B)|}{a}$$

et donc $\frac{1}{2}\lambda_1 \leq h(X)$. □

Remarque 5.1.4. La minoration de λ_1 en fonction de la constante de Cheeger $h(X)$ peut se comprendre intuitivement. En effet, la multiplicité de la valeur propre 0 pour le Laplacien est le nombre de composantes connexes du graphe, donc une valeur propre proche de 0 signifie que le graphe "possède presque (au moins) deux composantes connexes", soit deux parties du graphe faiblement reliées. Or la constante de Cheeger contrôle justement le nombre d'arêtes reliant les différentes parties du graphe.

5.2 Trou spectral et convergence de marches aléatoires

Dans toute la suite $X = \mathcal{X}(V,E)$ est un graphe fini, connexe et k-régulier, c'est-à-dire que tous ses sommets sont de degré k. On note δ_x la mesure de Dirac en $x \in V$, i.e. la fonction nulle partout sur V sauf en x où elle vaut 1 (nous pensons qu'il est aisé de faire la différence avec les coefficients de la matrice d'adjacence introduite à la section précédente). On définit aussi P l'opérateur de Markov sur $L^2(V)$ défini par :

$$Pf(x) = \frac{1}{k} \sum_{y \in V} \delta_{x,y} f(y) \qquad (f \in L^2(V),\ x \in V).$$

On a donc $\Delta = k(Id - P)$ et ainsi P est auto-adjoint. L'opérateur de Markov est aussi une contraction de $L^2(V)$, soit $\|P\| \leq 1$, donc son spectre est inclus dans $[-1, 1]$. Ses valeurs propres seront numérotées par ordre décroissant :

$$-1 \leq \mu_{|V|-1} \leq \cdots \mu_1 < \mu_0 = 1$$

avec $\lambda_i = k - k\mu_i$ où on rappelle que les λ_i sont les valeurs propres rangées par ordre croissant du Laplacien.

Proposition 5.2.1. *Soit $X = \mathcal{X}(V,E)$ un graphe fini, connexe et k-régulier. On note $Q_\alpha = \alpha Id + (1-\alpha)P$ la marche aléatoire "paresseuse" de paramètre $\alpha \in]0,1[$: à chaque pas il y a une probabilité de α de ne pas bouger et une probabilité de $\frac{1-\alpha}{k}$ de se déplacer vers chacun des sommets voisins.*
On suppose que $\lambda_1(X) \geq \varepsilon > 0$. Alors, il existe une constante $C = C(\varepsilon, k, \alpha)$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$ vérifiant $n \geq C \log |V|$,

$$\max_{x,y\in V} \left| \langle Q_\alpha^n \delta_x \, , \delta_y \rangle - \frac{1}{|V|} \right| \leq \frac{1}{|V|^{10}}$$

Remarque 5.2.2.
1. L'exposant 10 a été choisi arbitrairement et peut être remplacé par n'importe quel nombre strictement supérieur à 1.
2. Le facteur $\langle Q_\alpha^n \delta_x \, , \delta_y \rangle$ s'interprète comme la probabilité que la marche aléatoire passe du sommet x au sommet y en n étapes. Il s'agit donc de mesurer la convergence de la marche aléatoire paresseuse vers la loi uniforme sur V.
3. Il est important de comprendre que la constante ne dépend que du choix de α, du degré k et de la minoration ε de λ_1. En particulier, une fois α fixé, si $(X_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est une famille de c-extenseurs, alors il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\lambda_1(X_i) \geq \varepsilon$ pour tout entier i, et la constante C donnée par le théorème est la même pour tout les X_i.
4. Ce théorème admet une réciproque, que nous ne donnerons pas, mais qui peut être trouvé dans **Breuillard, réf à ajouter**.

Démonstration. Le spectre de Q_α est $\alpha + (1-\alpha)Spec(P)$. Grâce à l'étude faite sur le Laplacien et sa valeur propre 0 on sait que la plus grande valeur propre de Q_α est 1 et est associée à la droite vectorielle des fonctions constantes sur V, de supplémentaire orthogonal $L_0^2(V) = \left\{ f \in L^2(V) \mid \sum_{x\in V} f(x) = 0 \right\}$. On en déduit l'encadrement suivant :

$$\|Q_\alpha\|_{\mathcal{L}(L_0^2(V))} \leq \max_{\sigma \in Spec(Q_\alpha)\setminus\{1\}} |\sigma|$$

Or puisque $Spec(P) \subset [-1,1]$, on en déduit que pour toute valeur propre $\sigma \neq 1$ de Q_α, on a :

$$-1 < -1 + 2\alpha \leq \sigma \leq \alpha + (1-\alpha)\mu_1 = 1 - (1-\alpha)\lambda_1 \leq 1 - (1-\alpha)\varepsilon < 1$$

soit $\|Q_\alpha\|_{\mathcal{L}(L_0^2(V))} \leq \max\{1-2\alpha, \ 1-(1-\alpha)\varepsilon\} < 1$.
Soient maintenant x et y de sommets de X. On pose $f_x = \delta_x - \frac{1}{|V|}\mathbf{1} \in L_0^2(V)$ et on remarque que $Q_\alpha f_x = Q_\alpha \delta_x - \frac{1}{|V|}\mathbf{1}$ donc :

$$\left| \langle Q_\alpha^n \delta_x \, , \delta_y \rangle - \frac{1}{|V|} \right| = |\, \langle Q_\alpha^n f_x \, , \delta_y \rangle \,| \leq \|Q_\alpha\|^n_{\mathcal{L}(L_0^2(V))} \|f_x\| \|\delta_y\| \leq \sqrt{2} \|Q_\alpha\|^n_{\mathcal{L}(L_0^2(V))}$$

car

$$\|f_x\|^2 = \left(1 - \frac{1}{|V|^2}\right)^2 + (|V|-1)\frac{1}{|V|^2} = \frac{|V|^2 - |V|}{|V|^2} \leq \sqrt{2}.$$

Il suffit alors de prendre $C > 0$ tel que pour tout entier $n \geq C \log |V|$ on ait $\sqrt{2}\|Q_\alpha\|^n_{\mathcal{L}(L_0^2(V))} \leq \frac{1}{|V|^{10}}$. □

Peut-on prendre $\alpha = 0$ dans le théorème précédent ? Pour répondre à cette question, il faut comprendre le rôle joué par α dans la preuve précédente : il permet de séparer la plus petite valeur propre de Q_α de -1. En effet, pour $\alpha = 0$ (soit $Q_\alpha = P$) la valeur propre -1 peut apparaître et la raison de la majoration géométrique n'est alors plus strictement plus petite que 1. Le théorème suivant permet de voir quand cela se produit.

Proposition 5.2.3. *L'opérateur de Markov P admet la valeur propre -1 si et seulement si X est biparti, i.e. s'il existe une partie $A \subset V$ telle que $|A| = |V|/2$ et chaque arête du graphe relie un sommet de A à son complémentaire dans V.*

Démonstration. Si on suppose le graphe biparti, soit $A \subset V$ telle que $|A| = |V|/2$ et chaque arête du graphe relie un sommet de A à son complémentaire dans V. On pose $f = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A^c}$, on voit facilement que f vérifie $Pf = -f$.

Réciproquement, si $f \in L^2(V)$ vérifie $Pf = -f$, et si $x \in V$ est tel que $|f(x)| = \max_{y\in V} |f(y)|$, d'une part

$$\left| \frac{1}{k} \sum_{y\in V} \delta_{x,y} f(y) \right| \leq \frac{1}{k} \sum_{y\in V} \delta_{x,y} |f(y)| \leq |f(x)|$$

car la somme est constituée de k termes non-nuls majorés par $|f(x)|$, et d'autre part

$$|f(x)| = |Pf(x)| = \frac{1}{k} \left| \sum_{y\in V} \delta_{x,y} f(y) \right| \leq \frac{1}{k} \sum_{y\in V} \delta_{x,y} |f(y)|$$

donc $\sum_{y\in V}\delta_{x,y}(|f(x)|-|f(y)|)=0$ où la somme ne contient que des termes positifs. On en déduit que $|f|$ est constante sur tous les sommets reliés à x et égale à $|f(x)|$. Mais puisque $Pf(x)=-f(x)$, on voit facilement que nécessairement $f(y)=-f(x)$ pour tout sommet y relié à x. Le graphe étant connexe, on obtient que $|f|$ est constante sur tout V et non nulle (f est non nulle). Et en posant $V^+=\{y\in V \mid f(y)>0\}$ ainsi que $V^-=\{y\in V \mid f(y)<0\}$, toutes les arêtes relient un sommet de V^+ à un sommet de V^-.
De plus, on a bien $|V^+|=|V|/2$ car, f étant une fonction propre associée à -1, elle appartient à l'orthogonal de l'espace propre de P associé à 1 donc est de somme nulle. □

Enfin, dans le cas particulier d'un graphe de Cayley, cette caractérisation géométrique a une traduction algébrique :

Proposition 5.2.4. *Si X est le graphe de Cayley d'un groupe G avec pour partie génératrice S, alors X est biparti si et seulement s'il existe un sous-groupe H de G d'indice 2 tel que $S\cap H=\emptyset$.*

Ce résultat sera admis, on peut en trouver une preuve complète dans l'annexe de **Réf à ajouter, Breuillard, Tao, Miller**. Néanmoins, voici une petite image mentale qui aide à comprendre ce qu'il se passe. On peut représenter le graphe de Cayley avec l'identité au centre, entouré des éléments de S avec qui elle est reliée. On remarque donc que si le graphe est biparti, le groupe est divisé en deux parties, l'une contient S et l'autre l'identité. Puis on voit facilement que ces parties doivent forcément correspondre respectivement à l'ensemble des éléments obtenus par produit d'un nombre impair d'éléments de S et à l'ensemble des éléments obtenus par produit d'un nombre pair d'éléments de S. Ce qui implique notamment que cette parité ne dépend pas de la décomposition choisie, comme dans la décomposition en transpositions pour les permutations par exemple.

Si l'on reprend notre application principale qui consiste à générer aléatoirement des matrices de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ pour p un nombre premier très grand en multipliant un certain nombre de matrices de transvection choisies uniformément aléatoirement, on peut chercher à voir si le graphe de Cayley correspondant est biparti.
Mais il suffit de remarquer que si le nombre premier p est impair, on a pour toute matrice de transvection élémentaire $T\in T_n$, $T=T^{p+1}$ ce qui donne deux décompositions incohérentes par le point précédent. On en déduit donc la proposition :

Proposition 5.2.5. *Pour tout nombre premier $p\geq 3$ et tout entier $n\geq 3$, le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ n'admet pas de sous-groupe d'indice 2 ne rencontrant pas $T_n=\{E_{i,j}(\pm 1) \mid 1\leq i,j\leq n,\ i\neq j\}$.*

En revanche si on souhaite donner une vitesse de convergence "indépendante" de p (comme dans la proposition 5.2.1 pour la marche aléatoire simple paresseuse), il faut pouvoir garantir une distance entre la plus petite valeur propre de P et -1 indépendamment de p comme on a fait pour la plus grande valeur propre et 1.
Pour pousser plus loin cette étude, on pourrait tenter de trouver des critères assurant une telle propriété. La constante de Cheeger a pour but de quantifier la connexité du graphe, de déterminer si un graphe est "loin" d'avoir plusieurs composantes connexes. Or on a déjà vu que la proximité d'une valeur propre de P avec 1 est étroitement liée à ce degré de connexité. De la même manière, les valeurs propres proches de -1 sont liées à la proximité du graphe avec un graphe biparti. On pourrait imaginer introduire un nouvelle constante qui mesurerait cette proximité et mènerait à des critères géométriques pour assurer qu'une famille de graphes ait des opérateurs de Markov dont les valeurs propres sont uniformément séparées de -1. Ces critères appliqués à des graphes de Cayley se traduiraient alors en propriété algébrique du groupe, comme on a vu avec la propriété (T) et la propriété d'extension.

Le théorème suivant résume le résultat de notre étude :

Théorème 5.2.6. *On fixe un entier $n\geq 3$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers, et pour tout $p\in\mathcal{P}$, X_p le graphe de Cayley de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ avec pour partie génératrice l'image de l'ensemble des matrices élémentaires T_n. On note aussi P_p l'opérateur de Markov sur X_p.*

1. *Quel que soit $p\in\mathcal{P}$, la marche aléatoire simple sur X_p (quelle que soit la distribution initiale) converge vers la loi uniforme avec une vitesse géométrique.*
2. *On fixe $\alpha\in]0,1[$ et on note $Q_{\alpha,p}=\alpha Id+(1-\alpha)P_p$ la marche aléatoire paresseuse sur X_p. Alors, il existe une constante C, qui ne dépend que de α, telle que pour tout $p\in\mathcal{P}$ et tout $m\in\mathbf{N}$ vérifiant $m\geq C\log|\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})|$,*

$$\max_{A,B\in\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})}\left|\left\langle Q_{\alpha,p}^m\delta_A\,,\delta_B\right\rangle-\frac{1}{|\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})|}\right|\leq\frac{1}{|\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})|^{10}}$$

6 Annexe

6.1 Projection spectrale

La démonstration de la propriété (T) pour $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ avec $n\geq 3$ nécessite de donner une formulation précise de ses représentations unitaires. Le résultat qui répond à ce besoin est le théorème SNAG donné dans la sous-section

suivante. Celui-ci exprime l'action d'un groupe abélien (potentiellement infini !) sur sa représentation unitaire en terme de projection spectrale (ou "resolution of the identity" dans le livre de Rudin **réf à ajouter**). L'idée est en fait de généraliser la diagonalisation simultanée qu'on pourrait obtenir si le groupe abélien était fini et sa représentation de dimension finie.
Cette sous-section a donc pour but d'introduire ces mesures spectrales et d'en donner les propriétés qui vont servir dans nos preuves.

On considère dans toute la suite un espace topologique localement compact X muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(X)$ et un espace de Hilbert complexe $\mathcal{H}$. On note $Proj(\mathcal{H})$ le sous-ensemble de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ des projections orthogonales.

Définition 6.1.1. Une mesure spectrale de X dans $\mathcal{H}$ est une application

$$E : \mathcal{B}(X) \to Proj(\mathcal{H})$$

vérifiant les trois propriétés suivantes :

1. $E(\emptyset) = 0$ et $E(X) = Id$;
2. $E(B \cap B') = E(B)E(B')$ pour tout $B, B' \in \mathcal{B}(X)$;
3. si $(B_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de boréliens de X deux-à-deux disjoints, alors

$$E(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} B_n) = \sum_{n \in \mathbf{N}} E(B_n)$$

où la somme est convergente pour la topologie forte de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

L'un des points remarquables des projections spectrales est qu'elles permettent de construire des mesures "classiques" (à valeurs réelles et complexes). En effet, si E est une mesure spectrale de X dans $\mathcal{H}$, alors

— pour tout $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, l'application

$$\mathrm{d}E_{\xi,\eta} : B \mapsto \langle E(B)\xi\,, \eta \rangle$$

est une mesure complexe sur X ;

— pour $\xi \in \mathcal{H}$, la mesure $\mathrm{d}E_{\xi,\xi}$ est de plus positive et vérifie $\mathrm{d}E_{\xi,\xi}(X) = \|\xi\|^2$. On la note aussi μ_ξ et on l'appelle mesure associé au couple (E, ξ).

On voit très facilement que l'application qui à un couple (ξ, η) de vecteurs de $\mathcal{H}$ lui associe la mesure $\mathrm{d}E_{\xi,\eta}$ est sesquilinéaire, donc l'identité de polarisation donne :

$$\begin{aligned} 4\mathrm{d}E_{\xi,\eta} &= \mathrm{d}E_{\xi+\eta,\xi+\eta} - \mathrm{d}E_{\xi-\eta,\xi-\eta} + i\mathrm{d}E_{\xi+i\eta,\xi+i\eta} - i\mathrm{d}E_{\xi-i\eta,\xi-i\eta} \\ &= \mu_{\xi+\eta} - \mu_{\xi-\eta} + i\mu_{\xi+i\eta} - i\mu_{\xi-i\eta} \end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathrm{d}E_{\xi,\eta}$ est une mesure finie pour tout couple $(\xi, \eta) \in \mathcal{H}^2$. Le lemme pratique suivant démontre l'importance des mesures associées à un vecteur.

Lemme 6.1.2. *Si E^1 et E^2 sont deux mesures spectrales de X dans $\mathcal{H}$, alors elles sont égales si et seulement si les mesures associées aux couples (E^1, ξ) et (E^2, ξ) sont égales pour tout $\xi \in \mathcal{H}$.*

Démonstration. Le sens direct est évident. Pour la réciproque fixons $\xi \in \mathcal{H}$ et $B \in \mathcal{B}(X)$ quelconques, on cherche à montrer $E^1(B)\xi = E^2(B)\xi$. On note μ^1_ξ (respectivement μ^2_ξ) la mesure associée au couple (E^1,ξ) (respectivement au couple (E^2, ξ)). L'hypothèse est donc $\mu^1_\zeta = \mu^2_\zeta$ pour tout $\zeta \in \mathcal{H}$. L'application $(\xi, \eta) \mapsto \mathrm{d}E^1_{\xi,\eta}(B) = \left\langle E^1(B)\xi\,, \eta \right\rangle$ est une forme sesquilinéaire sur le $\mathbf{C}$-espace de Hilbert $\mathcal{H}$ donc par la formule de polarisation : pour tout $\eta \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} 4\left\langle E^1(B)\xi\,, \eta \right\rangle &= 4\mathrm{d}E^1_{\xi,\eta}(B) \\ &= \mathrm{d}E^1_{\xi+\eta,\xi+\eta}(B) - \mathrm{d}E^1_{\xi-\eta,\xi-\eta}(B) + i\mathrm{d}E^1_{\xi+i\eta,\xi+i\eta}(B) - i\mathrm{d}E^1_{\xi-i\eta,\xi-i\eta}(B) \\ &= \mu^1_{\xi+\eta}(B) - \mu^1_{\xi-\eta}(B) + i\mu^1_{\xi+i\eta}(B) - i\mu^1_{\xi-i\eta}(B) \\ &= \mu^2_{\xi+\eta}(B) - \mu^2_{\xi-\eta}(B) + i\mu^2_{\xi+i\eta}(B) - i\mu^2_{\xi-i\eta}(B) \\ &= 4\left\langle E^2(B)\xi\,, \eta \right\rangle \end{aligned}$$

et ainsi $\left\langle E^1(B)\xi\,, \eta \right\rangle = \left\langle E^2(B)\xi\,, \eta \right\rangle$ pour tout $\eta \in \mathcal{H}$. En particulier, en prenant $\eta = (E^1(B) - E^2(B))\xi$, on a

$$\|[E^1(B) - E^2(B)]\xi\|^2 = \left\langle [E^1(B) - E^2(B)]\xi\,, [E^1(B) - E^2(B)]\xi \right\rangle = 0$$

ce qui termine la preuve. $\square$

On peut aussi définir une intégrale par rapport à une mesure spectrale. La construction de cette objet utilise les mesures que l'ont a exhibé précédemment.
Pour toute fonction $f : X \to \mathbf{C}$ borélienne, bornée, l'application

$$(\xi, \eta) \mapsto \int_X f(x) \mathrm{d}E_{\xi,\eta}(x)$$

de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ dans $\mathbf{C}$ est sesquilinéaire et continue donc par le théorème de représentation de Riesz-Fréchet : il existe une unique application linéaire continue, notée $\int_X f(x)\mathrm{d}E$ telle que :

$$\forall (\xi, \eta) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}, \qquad \left\langle \left(\int_X f(x) \mathrm{d}E(x) \right) \xi \,, \eta \right\rangle = \int_X f(x) \mathrm{d}E_{\xi,\eta}.$$

La proposition suivante résume les principales propriétés de cette intégrale.

Proposition 6.1.3. *Soit X un espace topologique localement compact muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(X)$ et soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Si $E : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{H}$ est une mesure spectrale, alors l'application*

$$\Psi : \left| \begin{array}{ccc} L^\infty(X) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{H}) \\ f & \longmapsto & \int_X f \mathrm{d}E \end{array} \right.$$

est linéaire, multiplicative, transpose les involutions (i.e. $\Psi(\bar{f}) = \Psi(f)^*$) et vérifie :

$$\left\| \left(\int_{x \in X} f(x) \mathrm{d}E(x) \right) \xi \right\|^2 = \int_{x \in X} |f(x)|^2 \mathrm{d}E_{\xi,\xi}(x)$$

pour tout $f \in L^\infty(X)$ et $\xi \in \mathcal{H}$.

Démonstration. Nous ne donnerons qu'un schéma de démonstration, adapté de **Réf à ajouter : Rudin**, dans lequel on pourra trouvé une démonstration un peu plus détaillée.
Si s est une fonction simple, i.e. s'il existe $\{B_1, \dots, B_n\}$ des boréliens de X disjoints deux-à-deux et de réunion X, et des nombres complexes $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ tels que

$$s(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{B_i},$$

alors

$$\Psi(s) = \sum_{i=1}^n \alpha_i E(B_i)$$

car pour $\xi, \eta \in \mathcal{H}$,

$$\left\langle \left(\int_X s(x) \mathrm{d}E(x) \right) \xi \,, \eta \right\rangle = \int_X s(x) \mathrm{d}E_{\xi,\eta} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{B_i} \mathrm{d}E_{\xi,\eta} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle E(B_i)\xi \,, \eta \rangle = \left\langle \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i E(B_i) \right) \xi \,, \eta \right\rangle$$

et puisque les $E(B_i)$ sont des projections orthogonales, elles sont auto-adjointes, d'où

$$\Psi(s)^* = \sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_i E(B_i) = \Psi(\bar{s}).$$

On montre de même que sur l'ensemble des fonctions simples, Ψ est linéaire et multiplicative. Ainsi, si $\xi \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} \|\Psi(s)\xi\|^2 &= \langle \Psi(s)^* \Psi(s) \xi \,, \xi \rangle \\ &= \langle \Psi(\bar{s}) \Psi(s) \xi \,, \xi \rangle \\ &= \langle \Psi(|s|^2) \xi \,, \xi \rangle \\ &= \int_X |s|^2 \mathrm{d}E_{\xi,\xi} \end{aligned}$$

On conclut dans le cas général en rappelant que toute fonction $f \in L^\infty(X)$ est limite uniforme d'une suite de fonctions simples (car elle est bornée), il suffit alors de voir que toutes ces affirmations passent à la limite. $\square$

6.2 Représentations unitaires d'un groupe abélien

Nous allons maintenant pouvoir présenter le théorème SNAG (pour Stone, Naimark, Ambrose et Godement) qui décrit une représentation d'un groupe abélien par une mesure spectrale. On rappelle que le dual unitaire d'un groupe G est noté $\widehat{G}$.

Théorème 6.2.1 (Théorème SNAG)**.** *Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire d'un groupe G localement compact et abélien. Il existe une unique mesure spectrale régulière $E_\pi : \mathcal{B}(\widehat{G}) \to Proj(\mathcal{H})$ sur $\widehat{G}$ telle que*

$$\forall x \in G, \qquad \pi(x) = \int_{\widehat{G}} \chi(x) \mathrm{d}E_\pi(\chi).$$

De plus, un opérateur T dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ commute avec $\pi(x)$ pour tout $x \in G$ si et seulement si T commute avec $E(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\widehat{G})$.

Démonstration. Admis. On peut trouver la preuve dans **Référence à ajouter** ainsi qu'une réciproque. □

Remarque 6.2.2. Avec les notations du théorème, si on suppose le groupe G fini et que $\mathcal{H}$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$, on peut donner explicitement la mesure spectrale E_π.
En effet, on a le polynôme $X^{|G|} - 1$ scindé à racines simples dans $\mathbf{C}$ qui annule $\pi(x)$ pour tout x dans G donc, pour un élément x_0 de G fixé, le lemme des noyaux donne que $\mathcal{H}$ est somme directe de sous-espaces propres de $\pi(x_0)$. Mais G étant abélien, ces sous-espaces propres sont stables par tout les $\pi(x)$ pour $x \in G$ et finalement par récurrence on montre que les applications linéaires $\pi(x)$, $x \in G$ sont codiagonalisables. Le groupe G étant fini, il y a bien un nombre fini d'espaces propres, mais qui peuvent être de dimension infinie.
On remarque que cela donne la décomposition en espace isotypique : si F est l'un de ces sous-espaces, il existe un unique caractère linéaire $\chi \in \widehat{G}$ tel que

$$\pi(x).\xi = \chi(x)\xi$$

pour tout $x \in G$ et pour tout $\xi \in F$. Puisque G est fini, son dual $\widehat{G}$ l'est aussi et pour décrire la mesure spectrale E_π il suffit de donner $E_\pi(\{\chi\})$ pour $\chi \in \widehat{G}$. Or on remarque que si on pose pour $\chi \in \widehat{G}$ $E_\pi(\{\chi\})$ comme étant la projection orthogonale sur l'espace isotypique associé à χ, on a bien :

$$\pi(x) = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(x) E_\pi(\{\chi\}) = \int_{\widehat{G}} \chi(x) \mathrm{d}E_\pi(\chi)$$

et on conclut par unicité.

Références

[1] Bachir Bekka, Pierre de la Harpe, and Alain Valette. *Kazhdan's Property (T)*. New Mathematical Monographs. Cambridge University Press, 2008.

[2] Emmanuel Breuillard. Expander graphs, property (tau) and approximate groups. page 52, 2012.

[3] Jozef Dodziuk. Difference equations, isoperimetric inequality and transience of certain random walks. *Transactions of the American Mathematical Society*, 284(2) :787–794, 1984.

[4] Alexander Lubotzky. *Discrete Groups, Expanding Graphs and Invariant Measures*. Birkhäuser Basel, 1994.

[5] Walter Rudin. *Functional Analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, 2nd ed edition, 1991.